



TITLE:

代数群と数え上げ幾何(代数群とその周辺)

AUTHOR(S):

Procesi, Claudio; 宇澤, 達

CITATION:

Procesi, Claudio ...[et al]. 代数群と数え上げ幾何(代数群とその周辺). 数理解析研究所講究録 1984, 512: 157-165

ISSUE DATE:

1984-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/98333>

RIGHT:

代数群 と 数え上げ幾何

口-2大 Claudio Procesi

G : adjoint 半単純代数群/ \mathbb{C} とする。

σ : G の involution. $\mathfrak{g} = \text{Lie } G$, $\mathfrak{g}^\sigma = \text{Lie } G^\sigma$
と書くことにする。

このとき, $G \cdot \mathfrak{g} \subset \text{Grass}(\mathfrak{g})$ は G/G^σ に同型である。

$G \cdot \mathfrak{g}$ の $\text{Grass}(\mathfrak{g})$ 内での閉包を \overline{X} とかくことにする。

\overline{X} の性質

i) \overline{X} は smooth であって, 有限 G -orbits にわかれる。

ii) $\overline{X} - X = \overline{X} - G/G^\sigma = \bigcup_{i=1}^r S_i$, $i=1, \dots, r$ で S_i は \overline{X} の irreducible component とかけば, S_i は smooth である。又, $l = \dim G/G^\sigma$ とする。

iii) $\{1, \dots, r\}$ のすべての部分集合 $\{i_1, \dots, i_k\}$ に対して,

$S_{i_1} \cap \dots \cap S_{i_k}$ は空でない smooth variety になる。又,

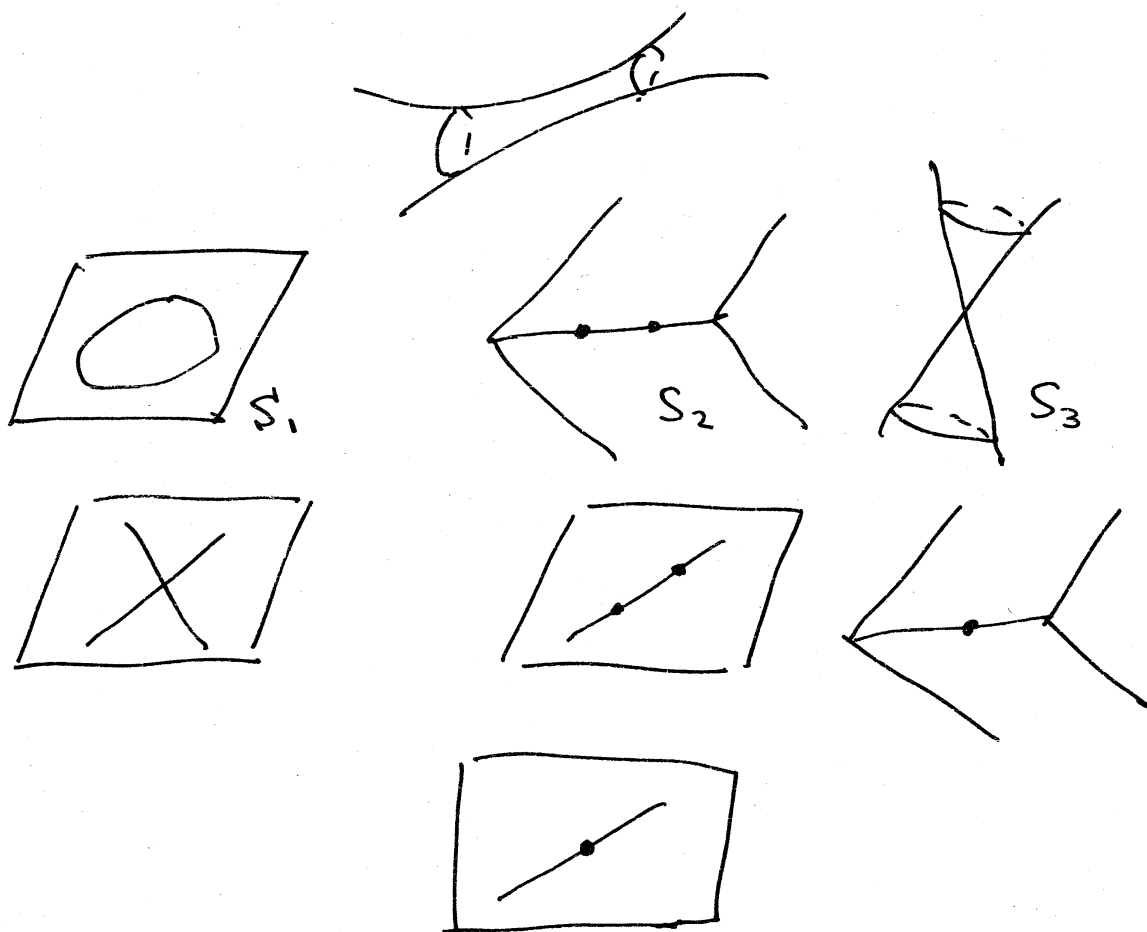
S_{i_1}, \dots, S_{i_k} は $S_{i_1} \cap \dots \cap S_{i_k}$ で横断的に交わる。

iv) 各 $S_{i_1} \cap \dots \cap S_{i_k}$ に対し G の partial flag variety $G/P_{i_1, \dots, i_k}$ が存在して, G -同変な projection $S_{i_1} \cap \dots \cap S_{i_k} \rightarrow G/P_{i_1, \dots, i_k}$ が存在する。

例

$G = \mathrm{PGL}(n)$, σ を $\sigma(x) = tx^{-1}$ によって定義する。

G/G^σ は, $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ 内の非特異 2 次超曲面の blow-up - 空間となる。 $n < G/G^\sigma = n-1$ である。 $n=4$ の時に \bar{X} の G -orbits を図示すると下図のようになる。



\bar{X} の元を *complete quadrics* と呼ぶことにする。又、
図の意味は次の通りである。

S_1 上の点は、平面上の点であり、接線は、平面との与 2 次
曲線と交わる直線であり、接平面は 2 次曲線に接する平面の
全体である。

S_2 上の点は、2 つの平面上の点であり、接線は 2 平面の交
線と交わる直線であり、接平面は 2 点のいずれかを通る平面
の全体である。

S_3 上の点は、cone 上の点であり、接線は cone の接線であり、
接平面は cone の頂点を通る平面の全体である。

iv) の fibration は、 S_1 の元に対してはその平面、 S_2 の元
に対してはその交線、 S_3 に対しては、cone の頂点に対応させる
写像になる。

数を如何にして計算するの

問題は、般の形では次の通りであった。

$V_1, \dots, V_S \subset X$ を X の部分多様体とし、

$\#(V_1 \cap \dots \cap V_S) < \infty$ であるとする。

V_i の \bar{X} 内での閉包を \bar{V}_i とすれば、

$$V_1 \cap \dots \cap V_S = \bar{V}_1 \cap \dots \cap \bar{V}_S$$

のときは、 $\#(V_1 \cap \dots \cap V_S)$ を求む。

$H^*(\bar{X}; \mathbb{Z})$ の explicit な記述ができれば理想的であるが、今の所存在していない。又できてモかなり複雑なものになる公算が大である。

しかしながら、 $V_i (i=1, \dots, s)$ が divisors であれば、 $H(V_1 \cap \dots \cap V_s)$ を求めることができる。

$\text{Pic}(\bar{X})$

$\bar{X} \supset S_1 \cap \dots \cap S_g = \mathcal{G}$ が \bar{X} の唯一の G 軌道になる。
(\bar{X} が complete quadrics であれば、 $\mathcal{G} = G/B$ となる。)

命題. $\mathcal{G} \hookrightarrow \bar{X}$ による誘導される準同型

$$\text{Pic}(\bar{X}) \longrightarrow \text{Pic}(\mathcal{G})$$

は単射である。

例 $\bar{X} = \text{complete quadrics}$ とする。

$W = \text{Pic}(\mathcal{G})$ とすれば、 W は G の weight lattice であり、 $\text{Pic}(\bar{X})$ の像は $2W$ となる。

$\text{Pic}(\bar{X})$ の元で、次の元は簡単に書ける。

i -次元部分空間と接する2次超曲面全体の定める因子
(“基本条件”) $= 2\omega_{i+1}$. ここで ω_{i+1} は fundamental weight. 又、 S_i は $2d_i$ に対応する。 d_i は simple

root である。

従って、基本条件を境界因子 (= 退化条件) で表わすことができる。これによつて、 $m = d \times X$ の基本条件の積を G/B のエホモロジ環の問題に帰着させるのが、Schubert の退化の原理である。

例 $\bar{X} = \text{complete quadrics}$, $n = 4$. $X_i = 2\omega_i$ とおく。

$$X_1^9 = X_3^9 = 1$$

$$X_1^6 X_2^2 X_3 = X_3^6 X_2^2 X_1 = 12$$

$$X_1^8 X_2 = X_3^8 X_2 = 2$$

$$X_1^5 X_2^3 X_3 = X_3^5 X_2^3 X_1 = 24$$

$$X_1^7 X_2^2 = X_3^7 X_2^2 = 4$$

$$X_1^4 X_2^4 X_3 = X_1 X_2^4 X_3^4 = 48$$

$$X_1^6 X_2^3 = X_3^6 X_2^3 = 8$$

$$X_1^6 X_2 X_3^2 = X_1^2 X_2 X_3^6 = 18$$

$$X_1^5 X_2^4 = X_3^5 X_2^4 = 16$$

$$X_1^5 X_2^2 X_3^2 = X_3^5 X_2^2 X_1^2 = 36$$

$$X_1^4 X_2^5 = X_3^4 X_2^5 = 32$$

$$X_1^4 X_2^3 X_3^2 = X_1^2 X_2^3 X_3^4 = 72$$

$$X_1^3 X_2^6 = X_3^3 X_2^6 = 56$$

$$X_1^5 X_2 X_3^3 = X_1^3 X_2 X_3^5 = 34$$

$$X_1^2 X_2^7 = X_3^2 X_2^7 = 80$$

$$X_1^4 X_2^2 X_3^3 = X_1^3 X_2^2 X_3^4 = 68$$

$$X_1 X_2^8 = X_3 X_2^8 = 92$$

$$X_1^4 X_2 X_3^4 = 42$$

$$X_2^9 = 92$$

$$X_1^2 X_2^6 X_3 = X_3^2 X_2^6 X_1 = 104$$

$$X_1^8 X_3 = X_3 X_1^8 = 3$$

$$X_1^3 X_2^5 X_3 = X_1 X_2^5 X_3^3 = 80$$

$$X_1^7 X_3^2 = X_3^2 X_1^7 = 9$$

$$X_1^3 X_2^4 X_3^2 = X_3^3 X_2^4 X_1^2 = 112$$

$$X_1^6 X_3^3 = X_3^3 X_1^6 = 17$$

$$X_1 X_2^7 X_3 = 104$$

$$X_1^4 X_3^5 = X_1^5 X_3^4 = 21$$

$$X_1^2 X_2^5 X_3^2 = 128$$

$$X_1^7 X_2 X_3 = X_1 X_2 X_3^7 = 6$$

$$X_1^3 X_2^3 X_3^3 = 104.$$

となる。例えば、「2次曲面に接する」という条件は、 $2(X_1 + X_2 + X_3)$ であるから、9つの2次曲面と接する2次曲面の数は、 $[2(X_1 + X_2 + X_3)]^9 = 666,841,088$ となる。

表の作成には次の事実を使う。

iv) a fibration を

$$\pi: S_{i_1} \cap \cdots \cap S_{i_k} \longrightarrow G/P_{\{i_1, \dots, i_k\}}$$

とする。この時、 $\pi^*(H^*(G/P_{\{i_1, \dots, i_k\}}; \mathbb{Z})) \ni X_{i_1}, \dots, X_{i_k}$ となる。従って特に、

1) $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 X_1^{k_1} X_2^{k_2} X_3^{k_3}$ ($k_1 + k_2 + k_3 = 6$) の計算は、 $H^*(G/B; \mathbb{Z})$ での計算に帰着する。

2) $\sum k_i = \dim(S_{i_1} \cap \cdots \cap S_{i_k})$ であれば、

$$\alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_k} X_{i_1}^{k_1} \cdots X_{i_k}^{k_k} = 0. \text{ となる。}$$

我々のとる戦略は、 X_1 を α_1, X_2, X_3 , X_2 を X_1, α_2, X_3 , 等々で置き換え、 $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 X_1^{k_1} X_2^{k_2} X_3^{k_3}$ の形の項に到達するように変形していくことである。途中で $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 X_1^{k_1} X_2^{k_2} X_3^{k_3}$

までも、2行ける項が出てくるが、これは2)によ、20になる、2しまうのである。

例 $X_1^4 X_2^2 X_3^2$.

$$X_1 = \frac{3}{4}\alpha_1 + \frac{2}{4}\alpha_2 + \frac{1}{4}\alpha_3 \quad \text{であるから,}$$

$$X_1^4 X_2^2 X_3^2 = \frac{3}{4}\alpha_1 X_1^3 X_2^2 X_3^2 + \frac{2}{4}\alpha_2 X_1^3 X_2^2 X_3^2 + \frac{1}{4}\alpha_3 X_1^3 X_2^2 X_3^2$$

となる。

$$\text{更に, } X_2 = \frac{1}{3}(2X_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3) \quad \text{であるから,}$$

$$\alpha_1 X_1^3 X_2^2 X_3^2 = \frac{2}{3}\alpha_1 X_1^4 X_2 X_3^2 + \frac{2}{3}\alpha_1 \alpha_2 X_1^3 X_2 X_3^2 + \frac{1}{3}\alpha_1 \alpha_3 X_1^3 X_2 X_3^2$$

となる。

従、2. $X_1^4 X_2^2 X_3^2$ を計算するためには、 $\alpha_i X_1^{i_1} X_2^{i_2} X_3^{i_3}$ ($i_1 + i_2 + i_3 = 8$) の値が必要であり、又これを求めるためには、 $\alpha_i \alpha_j X_1^{i_1} X_2^{i_2} X_3^{i_3}$ ($i \neq j, i_1 + i_2 + i_3 = 7$) の値が必要である。

$$\underline{\alpha_i \alpha_j X_1^{i_1} X_2^{i_2} X_3^{i_3} \quad (i \neq j, i_1 + i_2 + i_3 = 7)}$$

$$\alpha_1 \alpha_2 X_1^{i_1} X_2^{i_2} X_3^{i_3} \quad (i_1 + i_2 + i_3 = 7) \text{ の説明をする。}$$

$\dim S_1 \cap S_2 = 7$ であるから、 $i_1 + i_2 = 7$ 、つまり $i_3 = 0$ であれば、 $\alpha_1 \alpha_2 X_1^{i_1} X_2^{i_2} X_3^{i_3} = 0$ であることに注意する。

従、2. i_3 を1としなければよい。

$$X_3 = \frac{1}{2}(X_2 + \alpha_3) \quad \text{であるから,}$$

$$\alpha_1 \alpha_2 X_1^{i_1} X_2^{i_2} X_3^{i_3} = \frac{1}{2} \alpha_1 \alpha_2 X_1^{i_1} X_2^{i_2+1} X_3^{i_3-1} \\ + \frac{1}{2} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 X_1^{i_1} X_2^{i_2} X_3^{i_3-1}$$

右辺の第1項の X_3 の巾は $i_3-1 < i_3$ であり, 第2項は $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ が $2 \leq i_3$ の 2 , $H^*(G/B; \mathbb{Z})$ に帰着する。従って inductive に, $\alpha_1 \alpha_2 X_1^{i_1} X_2^{i_2} X_3^{i_3}$ の値がわかる。

$$\underline{\alpha_2 X_1^{i_1} X_2^{i_2} X_3^{i_3} \quad (i_1 + i_2 + i_3 = 8)}$$

$\alpha_1 X_1^{i_1} X_2^{i_2} X_3^{i_3} \quad (i_1 + i_2 + i_3 = 8)$ の説明をする。(他も同様。)

$\dim S_1 = 8$ であるから, $i_2 = i_3 = 0$ であれば, $\alpha_1 X_1^{i_1} X_2^{i_2} X_3^{i_3} = 0$ である。従って, i_2, i_3 を 1 以上 7 以下にすることができればよい。

$X_2 = \frac{1}{3} (2X_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3)$ であるから, $\alpha_1 X_1^{i_1} X_2^{i_2} X_3^{i_3}$ は, $\alpha_1 X_1^{i_1+1} X_2^{i_2-1} X_3^{i_3}$, $\alpha_1 \alpha_2 X_1^{i_1} X_2^{i_2+1} X_3^{i_3}$, $\alpha_1 \alpha_3 X_1^{i_1} X_2^{i_2-1} X_3^{i_3+1}$ の和になる。従って, $i_2 = 0$ としてよい。

$X_3 = \frac{1}{3} (X_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3)$ であるから, $\alpha_1 X_1^{i_1} X_3^{i_3}$ は $\alpha_1 X_1^{i_1+1} X_3^{i_3-1}$, $\alpha_1 \alpha_2 X_1^{i_1} X_3^{i_3+1}$, $\alpha_1 \alpha_3 X_1^{i_1} X_3^{i_3-1}$ の和になる。従って, inductive に求めることができる。

一般の数え上げ問題

一般の数え上げ問題に対して, $\bar{\alpha}$ は不十分である。

(DeConcini の講演) しかしながら, 次の定理が成立する。

定理 V_i を X の部分多様体とする。

$\sum \text{codim } V_i = \dim X$ であれば, X を余次元 2 の G -軌道の閉包に沿って何回か blow up して得られる G -多様体 \bar{X}' である。

\bar{V}_i' を \bar{X}' 内での V_i の閉包とした時, general な $g_i \in G$ に対し,

$$\bigcap g_i \bar{V}_i' = \bigcap g_i V_i$$

となるものが存在する。

尚, X の G -同変正規完備化 \bar{X}' で \bar{X} 上にあるものは, 対称空間 X のルート系の Weyl chamber の rational polyhedral decomposition と一対一に対応する。

(早澤 達記)

文献

C. DeConcini - G Processi

Complete Symmetric Varieties I

Springer L.N.M. (996) p. 1~44

Complete Symmetric Varieties II. (preprint)